

基于混合整数线性规划模型与进化策略模型的作物种植决策问题研究

刘松岩¹, 史雨彤¹, 马婧萱², 李佳宁¹, 刘晓非¹

(1. 云南大学信息学院; 2. 云南大学软件学院, 云南昆明 650500)

摘要: 在有限耕地资源下优化种植方案对乡村经济发展具有重要意义。基于混合整数线性规划与进化策略模型, 对某乡村种植策略进行优化。通过设置最小种植面积约束并引入离散化处理, 建立最大化净收益的优化模型; 结合长期需求, 利用Spearman相关系数分析作物替代性与互补性, 并通过进化策略提升方案适应性。实验结果表明, 该方法较传统线性规划更能应对市场与环境变化, 显著提高种植收益, 具备较强的鲁棒性和推广价值, 为农业种植规划提供科学决策支持。

关键词: 最优种植方案; 混合整数线性规划模型; 进化策略模型; Spearman相关系数; 时序序列分析

DOI: 10.11907/rjdk.251669

扫描二维码阅读全文: 

中图分类号: TP18

文献标识码: A

文章编号: 1672-7800(XXXX)0XX-0001-09

Research on the Crop Planting Decision Problem Based on Mixed-Integer Linear Programming Model and Evolutionary Strategy Model

LIU Songyan¹, SHI Yutong¹, MA Jingxuan², LI Jianing¹, LIU Xiaofei¹

(1. School of Information, Yunnan University; 2. School of Software, Yunnan University, Kunming 650500, China)

Abstract: Optimizing planting schemes under limited arable land is vital for rural development. This study employs a mixed-integer linear programming and evolutionary strategy model to optimize village planting strategies. By setting minimum planting area constraints and applying discretization, a net income-maximizing model is built. Long-term needs are incorporated through Spearman's rank correlation to assess crop substitutability and complementarity, while evolutionary strategies enhance adaptability. Experimental results show that this method better responds to market and environmental changes than traditional linear programming, significantly improves revenue, and demonstrates strong robustness and generalizability, providing scientific support for agricultural planning.

Key Words: optimal planting plan; mixed-integer linear programming model; evolutionary strategy model; Spearman's rank correlation coefficient; time series analysis

0 引言

在全球人口增长与耕地资源紧张的背景下, 科学规划作物种植以提高农业收益至关重要。中国城镇化与资源约束加剧了耕地减少, 威胁粮食安全^[1]。乡村地区受气候、市场与成本等多重因素影响, 种植收益波动显著, 亟需

高效可持续的种植方案以推动农业优化与乡村振兴。作物种植优化是农业管理的关键环节, 但传统经验决策难以应对市场与环境动态变化, 而数学建模方法如线性规划与动态规划已被用于作物结构与收益优化^[2]。本文结合混合整数线性规划与进化策略, 在精准优化收益的同时增强方案的适应性与鲁棒性。

本文基于2024年全国大学生数学建模竞赛C题数

收稿日期: 2025-11-07

基金项目: 云南大学研究生教育教学改革研究及成果培育项目(JG-202430); 云南省专业学位研究生教学案例库项目(2025)

作者简介: 刘松岩(1993-), 男, 博士, 云南大学信息学院讲师, 研究方向为计算机视觉、人工智能; 史雨彤(2003-), 女, 云南大学信息学院学生, 研究方向为人工智能; 马婧萱(2004-), 女, 云南大学软件学院学生, 研究方向为人工智能; 李佳宁(2004-), 女, 云南大学信息学院学生, 研究方向为人工智能; 刘晓非(1988-), 男, 博士, 云南大学信息学院副教授, 研究方向为离散优化算法设计与分析。

据^[3],构建以净收益最大为目标的混合整数线性规划模型,综合考虑面积、产量、成本与价格等因素,分析滞销与折扣情形下 2024—2030 年的种植方案。进一步引入销售趋势、气候与成本波动等不确定性,结合 Spearman 相关性进化策略迭代优化长期策略。

本文创新性地将混合整数线性规划(MILP)与进化策略(ES)相结合,构建了既能精确优化收益又具动态适应性的乡村作物种植决策模型。在模型设计中,不仅考虑地块类型、轮作要求和最小种植面积约束,还通过进化策略迭代优化,使方案在市场价格、销售量和环境波动等不确定因素下具备更高的鲁棒性和长期稳定性,相较于传统静态线性规划方法显著提升了收益和适应能力。

此外,本文创新性引入 Spearman 相关系数分析作物间替代性与互补性,将多作物协同种植的复杂关系纳入优化过程,实现了科学组合与长期策略优化。基于实地数据的实验显示,该方法在多作物协同、动态调控和长期收益最大化方面表现出明显优势,为农业种植规划和乡村经济发展提供了可推广的科学决策支持。实验结果表明,本文方法能够有效提高种植收益,相较于传统线性规划方法,在市场需求变化和环境波动下表现出更好的灵活性和鲁棒性。

1 相关工作

农作物种植优化属于农业管理和土地资源分配方面的重要研究方向,已有相关研究大多将目光放在线性规划优化、区域协调种植策略、作物组合建模和土地可持续管理等方面,尽管这些研究在特定领域取得了一定成果,但在多作物协同种植的处理、应对市场波动以及实现长期收益最大化的过程中,仍有明显不足,亟需进一步发展可提升农业生产稳定性与可持续性的决策模型。

线性规划和混合整数线性规划在农业资源优化配置中得到了广泛应用。文献[4-7]表明,线性规划在复杂资源分配、多约束条件的环境下,能够有力优化作物种植模式和土地分配方式,并在提高生产效率和利润方面展现出显著成效。此外,区域协调模型和作物最优组合模型^[8-10]通过建立复杂约束下的线性规划模型,实现了不同作物间的协同种植与优化配置。然而,这些方法主要适用于静态种植决策,在动态市场环境和气候变化因素下适应性较弱。

近年来,研究者们尝试通过区域协调模型优化农业生产布局,以提高土地资源利用率并减少作物间的竞争。例如,文献[8-9]研究了不同区域的最优作物组合,提出了在气候和市场条件变化下优化土地利用方式的方法。尽管这类研究在特定地区的种植结构优化方面取得了一定成果,但其主要针对单一区域或少数作物的组合优化,未能形成适用于多种作物协同种植的通用优化框架。

与此同时,随着全球农业对可持续发展需求的提升,有研究建议通过可持续土地管理实践以增强土壤多功能性,从而提高农作物的长期产量和生态效益^[11]。研究表明,通过为不同地块设置种植约束,如轮作制度、土壤养分需求、生态保护区划等,可以在优化农业收益的同时,实现长期可持续的土地利用。然而,这些研究主要侧重于生态效应评估,尚未深入结合数学优化方法进行农业种植的全局优化。

近年来,针对作物种植中的不确定性问题,越来越多研究将环境波动、市场价格和政策风险纳入优化模型。例如,文献[12]提出多阶段线性规划模型,以优化在政策补贴和环境风险下的种植决策。还有研究通过随机规划或条件风险值框架,结合作物模型和优化算法,提升作物种植方案在动态环境下的鲁棒性和收益稳定性^[13-16]。

尽管已有研究在应对不确定性方面取得了一定成果,但大多侧重于单作物或少量作物规划,且优化方法主要基于线性或随机规划,难以充分刻画作物间替代、互补关系以及动态市场和气候波动的综合影响。因此,构建一种能够同时考虑多作物协同效应、作物间相关性及环境不确定性的新型优化模型,对于提升农业生产的稳定性和收益具有重要意义。

正是基于这一背景,本文提出了融合混合整数线性规划与进化策略的动态种植优化方法,旨在弥补现有研究的局限。实验证明,本文方法在收益结果和应对市场波动方面均优于传统线性规划及启发式算法,表现出更好的推广价值。

2 模型背景与假设

2.1 模型背景

华北山区某乡村拥有 1 201 亩耕地,分为 34 块平旱地、梯田、山坡地及水浇地,并配备 16 个普通大棚和 4 个智慧大棚(各 0.6 亩)。不同地块适宜作物类型有别:平旱地、梯田和山坡地可种一季粮食作物,水浇地适种水稻或两季蔬菜;普通大棚可种一季蔬菜与一季食用菌,智慧大棚可种两季蔬菜。每块地或大棚同季仅能种一种作物,且每 3 年需至少种植一次豆类作物^[3]。为提升乡村经济效益并降低风险,种植策略需结合轮作混种以增强生物多样性与抗逆性,同时兼顾田间管理便利性,避免种植过度分散^[17-18]。

为了在此基础上构建可操作的数学模型,需要对种植过程中的假设条件进行明确界定,从而为后续优化分析提供合理依据。

2.2 模型假设

农作物种植受气候、需求与政策等因素影响,市场价格与销售量存在不确定性。但历史数据表明,在无极端事件时,其年度波动有限,对种植结构影响较小。因此,为了

聚焦方法创新并保证模型可解, 本文在初步分析中假设 2023—2030 年市场环境与销售保持量稳定, 而潜在不确定性将在后文作进一步分析。

模型主要假设如下: ①地块总面积固定, 各地块面积已知; ②预测期内无重大自然灾害; ③2023 年种植结构为最优结果, 2024—2030 年各地块作物种类不变, 面积可调; ④市场环境与销售在预测期内保持不变; ⑤所提供数据准确适用于 2024—2030 年预测。

通过这些假设, 模型能够在相对可控的条件下建立初步优化方案, 并为后续考虑的随机变化提供基础。

3 假设各项条件保持稳定下的种植策略

作物的预期销售量、种植成本、亩产量和销售价格相对于 2023 年保持稳定。如果某种作物的产量超出预期销售量, 超出部分可能会滞销或以折扣价(2023 年价格的 50%)出售。针对两种不同的处理方式, 分别为未来 7 年(2024—2030 年)制定最优的农作物种植方案, 以最大化整体收益。

3.1 数据获取

本文研究所使用的作物销量、种植成本和销售价格数据均来自 2024 年高教社杯全国大学生数学建模竞赛赛题 C 题附件^[3]。

3.2 数据预处理

3.2.1 地块合并

对地块编号中含同类字母的地块(如 A1 到 A6)进行合并分析, 简化计算。A、B、C 类地块每年种植一季, D、E、F 类地块除 D 类种水稻外, 种植两季。可以分别对 ABC 地块的组合和 DEF 地块的组合建立模型。由于不同作物可种植的耕地、可种植季节不同, 故将总销量划分为 3 个分析组, 分别为: ABC 地块作物总销量、DEF 地块第一季总销量、DEF 地块第二季总销量。

3.2.2 任意作物 j 在任意地块 i 的年均销售量 A_{ij}

由于文献中未提供作物 2023 年销售量, 假设损失率后, 计算出每种作物的销售量, 并作为 2024—2030 年的预期销售量。蔬菜类损失率设为 17.1%^[19-20], 粮食类为 8%^[19-20], 食用菌类为 20%^[21]。需要说明的是, 销售量在本文中仅作为衔接亩产量与收益的中间变量, 其设置旨在贴近现实生产情境, 而非模型的核心决策参数。由于实际种植收益主要受种植结构与市场价格驱动, 损失率的微小波动不会对整体优化结果产生实质影响。

对水稻分为两季, 并将亩产量和成本减半。每种作物的总销量计算方法为: 亩销量 × 种植面积。

3.2.3 任意作物 j 的平均销售单价 P_j

附件中提供的各农作物的销售单价为一个范围而非一个具体的值, 为便于后续计算, 本文采用其区间中值作为农作物的平均销售单价, 以便于后续进行每个农作物收

益的计算。同时, 不同地块上相同作物的销售单价范围一致, 故将所有计算公式统一如式(1)所示。

$$P_j = \frac{P_{lj} + P_{hj}}{2}, \quad j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (1)$$

其中, P_j 为编号为 j 的作物的平均销售单价, P_{lj} 为提供数据中编号为 j 的作物的最低销售单价, P_{hj} 为提供数据中编号为 j 的作物的最高销售单价, n 为作物种类总数($n=41$)。

3.2.4 任意作物 j 在任意地块 i 的亩收益 Z_{ij}

设计优化模型需要计算每种农作物的亩收益, 进而计算出相应方案的最终总收益。作物的亩收益由该作物在对应地块上的总销售额与总种植成本之差可得, 计算公式如式(2)所示。

$$Z_{ij} = \frac{A_{ij} \cdot P_j - C_j \cdot S_i}{S_i}, \quad j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad i \in \{A, B, \dots, F\} \quad (2)$$

其中, Z_{ij} 为编号为 j 的作物在 i 类地块的亩收益, A_{ij} 为编号为 j 的作物在 i 类地块的销售量, P_j 为编号为 j 的作物的平均销售单价, C_j 为编号为 j 的作物的种植成本, S_i 为 i 类地块的总面积。

3.2.5 任意类地块 N 可种植作物集合 J_N 与可种植豆类作物集合 J_N^{beans}

A、B、C 类地块每年可种植的作物集合是一致的: $J_A = J_B = J_C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ 。

D、E、F 类地块各自可种植的作物集合不同, 并且同一地块第一季和第二季可种植的作物也不同: $J_D^{第一季} = \{16, 17, 18, 20, 28\}$; $J_E^{第一季} = \{17, 18, 19, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31\}$; $J_F^{第一季} = \{17, 19, 25, 26, 32, 33\}$; $J_D^{第二季} = \{35, 36, 37\}$; $J_E^{第二季} = \{38, 39, 40, 41\}$; $J_F^{第二季} = \{21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34\}$ 。

A、B、C 类地块每年可种植的豆类作物集合也一致: $J_A^{beans} = J_B^{beans} = J_C^{beans} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 。

E、E、F 类地块每年可种植的豆类作物集合不同且只有第一季可以种植豆类作物: $J_D^{beans} = \{17, 18\}$; $J_E^{beans} = \{17, 18, 19\}$; $J_F^{beans} = \{17, 19\}$ 。

J_N 为地块 N 可种植作物的集合, J_N^{beans} 为地块 N 可种植豆类作物的集合, $N \in \{A, B, C, D, E, F\}$ 。

3.3 未来 7 年各作物种植决策优化模型

该模型的决策变量为 x_{ijt} , 表示 i 地块上第 t 年种植第 j 种作物的面积(亩)。

3.3.1 目标函数

为了使种植作物的总利润最大, 将种植作物的总利润作为目标函数, 即求解未来 7 年内总收益减去种植成本后的最大值。因此, 需要建立总收益和种植成本的关系表达式。

根据不同的销售方案, 将销售收益分为 R_{ij} 滞销与 R_{ij} 打折。超出部分滞销时, 超出部分不被销售, 销售收益 R_{ij} 滞销的计算公式如式(3)所示。

$$R_{ij\text{滞销}} = \min\left(\sum_{t=2024}^{2030} x_{ijt} \cdot Y_{ij}, 7A_{ij}\right) \quad (3)$$

超出部分打折时,超出部分以半价销售,销售收益 $R_{ij\text{打折}}$ 计算公式如式(4)所示。

$$R_{ij\text{打折}} = \min\left(\sum_{t=2024}^{2030} x_{ijt} \cdot Y_{ij}, 7A_{ij}\right) + \frac{1}{2} \max\left(0, \sum_{t=2024}^{2030} x_{ijt} \cdot Y_{ij} - 7A_{ij}\right) \quad (4)$$

其中, $R_{ij\text{滞销}}$ 表示滞销方案下编号为 j 的作物在 i 类地块上的实际销售收益; $R_{ij\text{打折}}$ 表示打折方案下编号为 j 的作物在 i 类地块上的实际销售收益; x_{ijt} 表示作物 j 在 i 类地块第 t 年的种植面积; Y_{ij} 为单位面积产量; $7A_{ij}$ 为 7 年内预计销售总量。

最后可将总利润计算公式统一为如式(5)所示。

$$\max Z = \sum_{j=1}^{15} P_j \sum_{i=A}^C R_{ijk} - \sum_{j=1}^{15} C_j \sum_{i=A}^C \sum_{t=2024}^{2030} x_{ijt}, \quad k \in \{\text{滞销, 打折}\} \quad (5)$$

其中, x_{ijt} 表示作物 j 在 i 类地块第 t 年的种植面积; P_j 为编号 j 作物的销售单价; C_j 为编号 j 作物的批种植成本; R_{ijk} 表示 k 方案下编号为 j 的作物在 i 类地块上的实际销售收益。

3.3.2 ABCDEF 六类地块的共同约束

无论是在滞销的销售方案下,还是在打折的销售方案下, A、B、C、D、E、F 类都有着一些共同的约束条件,具体约束条件如下:

(1) 重茬约束。由于每两年间同一地块不能种植相同作物,以之后的 7 年作为整体考虑,平均每年在每类地上每种作物的种植面积应不大于每类地总面积的一半并且要大于零,即对于每一个 $i \in \{A, B, C, D, E, F\}$ 、每一个 $j \in J_N$ ($N \in \{A, B, C, D, E, F\}$) 和每一个 $t \in \{2024, 2025, \dots, 2030\}$ 有: $0 \leq x_{ijt} \leq \frac{1}{2} S_i$ 。

(2) 豆类种植次数约束。由于每 3 年内同一地块至少需要种植一次豆类,以之后的 7 年作为整体来考虑,3 年间每种豆类作物平均每年在每类地上的种植面积之和应大于或等于每类地的总面积,即对于每一个 $i \in \{A, B, C, D, E,$

$F\}$ 、每一个 $j_{\text{beans}} \in J_N^{\text{beans}}$ ($N \in \{A, B, C, D, E, F\}$) 和每一个 $t_0 \in \{2024, 2025, \dots, 2028\}$ 有: $\sum_{t=t_0}^{t_0+2} x_{ij_{\text{beans}}t} \geq 1$ 。

(3) 土地面积约束。每年中每类土地上所有作物种植的面积之和要小于或等于该类土地的总面积,即对于每一个 $i \in \{A, B, C, D, E, F\}$ 、每一个 $j \in J_N$ ($N \in \{A, B, C, D, E, F\}$) 和每一个 $t \in \{2024, 2025, \dots, 2030\}$ 有: $\sum_{j=1}^{15} x_{ijt} \leq S_i$ 。

其中, S_i 是指 i 类地的总面积; $x_{ij_{\text{beans}}t}$ 是指第 t 年编号为 j_{beans} 的豆类作物在 i 类地上的种植面积; J_N 表示地块 N 可种植作物集合; J_N^{beans} 为地块 N 可种植豆类作物集合; t_0 是未来 7 年中任意 3 年的起始年份。

3.3.3 DEF 三类地块的特有约束

(1) EF 类地过小面积约束。考虑到实际生产中需便于田间管理且种植面积不宜过小,而 E、F 类地的总面积相对较小,因此规定 E、F 类地上每种作物每年种植的面积只能从 $\{0, 0.3, 0.6\}$ 中选择,即对于每一个 $i \in \{E, F\}$ 、每一个 $j \in J_N$ ($N \in \{E, F\}$) 和每一个 $t \in \{2024, 2025, \dots, 2030\}$ 有: $x_{ijt} \in \{0, 0.3, 0.6\}$ 。

(2) DEF 类地第二季豆类种植次数约束。对于 DEF 耕地, D、E、F 类耕地第二季时均无法种植豆类作物,因此不考虑 DEF 类地第二季的豆类种植次数约束,即 $j \in J_E^{\text{第一季}}$ 。

3.3.4 模型建立

根据上文所述公式,针对不同类型地块的特性,采用差异化建模方法。针对 A、B、C、D 类地,采用线性规划模型;针对 E、F 类地,考虑到每类地总面积较小且种植作物不能太过分散,构建混合整数线性规划模型,其决策变量 x_{ijt} 表示第 t 年作物 j 的种植面积,并施加 $x_{ijt} \in \{0, 0.3, 0.6\}$ 的约束,既满足种植作物管理要求,又避免种植结构单一化。

(1) ABC 三类地模型。其公式如式(6)所示,约束条件如式(7)所示。

$$\max Z_{(ABC)} = \sum_{j=1}^{15} P_j \sum_{i=A}^C R_{ijk} - \sum_{j=1}^{15} C_j \sum_{i=A}^C \sum_{t=2024}^{2030} x_{ijt}, \quad k \in \{\text{滞销, 打折}\} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & x_{ijt} \leq \frac{1}{2} S_i, i \in \{A, B, C\}, t \in \{2024, 2025, \dots, 2030\} \\ & \sum_{t=t_0}^{t_0+2} x_{ij_{\text{beans}}t} \geq 1, i \in \{A, B, C\}, t_0 \in \{2024, 2025, \dots, 2028\}, j_{\text{beans}} \in J_N^{\text{beans}}, N \in \{A, B, C\} \\ & \sum_{j=1}^{15} x_{ijt} \leq S_i, i \in \{A, B, C\}, t \in \{2024, 2025, \dots, 2030\} \\ & x_{ijt} \geq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

(2) DEF 三类地第一季模型。其公式如式(8)所示, 约束条件如式(9)所示。

$$\max Z_{\text{第一季}(DEF)} = \sum_{j \in J_N^{\text{第一季}}} P_j \sum_{i=D}^F R_{ijk} - \sum_{j \in J_N^{\text{第一季}}} C_j \sum_{t=2024}^{2030} x_{ijt}, \quad N \in \{D, E, F\}, \quad k \in \{\text{滞销, 打折}\} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & x_{ijt} \geq 0, i \in \{D, E, F\}, t \in \{2024, 2025, \dots, 2030\} \\ & \sum_{t=t_0}^{t_0+2} x_{ij_{\text{beans}}t} \geq S_i, i \in \{D, E, F\}, t \in \{2024, 2025, \dots, 2030\}, j_{\text{beans}} \in J_N^{\text{beans}}, N \in \{D, E, F\} \\ & \sum_j x_{ijt} = S_i, i \in \{D, E, F\}, t \in \{2024, 2025, \dots, 2030\}, j \in J_N^{\text{第一季}}, N \in \{D, E, F\} \\ & x_{ijt} \leq \frac{1}{2} S_i, i \in \{D\}, t \in \{2024, 2025, \dots, 2030\} \\ & x_{ijt} \in \{0, 0.3, 0.6\}, i \in \{E, F\}, t \in \{2024, 2025, \dots, 2030\} \end{aligned} \quad (9)$$

(3) DEF 三类地第二季模型。其公式如式(10)所示, 约束条件如式(11)所示。

$$\max Z_{\text{第二季}(DEF)} = \sum_{j \in J_N^{\text{第二季}}} P_j \sum_{i \in D} R_{ijk} - \sum_{j \in J_N^{\text{第二季}}} C_j \sum_{t=2024}^{2030} x_{ijt}, \quad N \in \{D, E, F\}, \quad k \in \{\text{滞销, 打折}\} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & x_{ijt} \geq 0, i \in \{D, E, F\}, t \in \{2024, 2025, \dots, 2030\} \\ & \sum_j x_{ijt} = S_i, i \in \{D, E, F\}, t \in \{2024, 2025, \dots, 2030\}, j \in J_N^{\text{第二季}}, N \in \{D, E, F\} \\ & x_{ijt} \leq \frac{1}{2} S_i, i \in \{D\}, t \in \{2024, 2025, \dots, 2030\} \\ & x_{ijt} \in \{0, 0.3, 0.6\}, i \in \{E, F\}, t \in \{2024, 2025, \dots, 2030\} \end{aligned} \quad (11)$$

对于以上模型, 基于 LINGO 编写程序求解, 可以得到 2024—2030 年间每类土地各季度的作物最优种植面积分配方案, 结合各地块面积数据, 通过比例分配法即可将作物总面积分解至具体地块。

4 假设各项条件发生随机变化下的种植策略

在实际生产中, 各种作物的销售量、产量及价格都会受到市场与气候因素影响而出现波动。为增强模型的现实适应性, 本文在引入随机变化分析, 对假设条件进行动态调整。

真实情况下, 各种作物的销售量每年会有一定的波动。借助于文献[3]中 C 题给出的信息, 可以将小麦和玉米的销售量波动限定在 5%~10% 的增长范围内, 将其他作物的销售量波动确定为 ±5% 的变化。考虑到温度、降雨量和日照时数等气候变化对粮食生产有着显著影响, 亩产量可能受到气候变化的影响, 波动范围为 ±10%^[18]。种植成本预计每年增加约 5%, 粮食作物的价格稳定, 蔬菜的价格预计每年上涨 5%, 而食用菌的价格可能每年下降 1%~5%, 尤其是羊肚菌的价格每年下降 5%。

4.1 未来 7 年各作物种植决策优化模型

在明确波动范围后, 本文将这些随机因素纳入优化模型, 并通过调整决策变量以反映实际生产中的不确定性, 从而求解未来 7 年的种植策略。

本文模型的决策变量为: ① x_{jt} 表示第 j 种作物在第 t 年的种植面积(亩); ② y_{jt} 表示第 j 种作物在第 t 年的亩产量(斤); ③ p_{jt} 表示第 j 种作物在第 t 年的销售单价(元/斤); ④ c_{jt} 表示第 j 种作物在第 t 年的种植成本(元/亩)。

4.1.1 目标函数

目标函数依旧是得到 2024—2030 年间的最大总净收益, 其公式如式(12)所示。

$$\max Z = \sum_{t=2024}^{2030} \sum_{j=1}^{41} x_{jt} \times (p_{jt} \times y_{jt} - c_{jt}) \quad (12)$$

其中, Z 表示 2024—2030 年的总收益; $p_{jt} \times y_{jt}$ 表示第 j 种作物在第 t 年的每亩收益; c_{jt} 表示第 j 种作物在第 t 年的每亩种植成本。

4.1.2 波动因素新增导致的新增约束条件

(1) 销售量增长约束。对于小麦和玉米, 有: $A_{jt} = A_{j,t-1} \times (1 + g_j)$, $j \in \{6, 7\}$ 。其中, A_{jt} 表示第 j 种作物在第 t 年的预期销售量; g_j 表示第 j 种作物的年销售量增长率, 对于小麦和玉米 $g_j \in [0.05, 0.10]$, 其他作物 $g_j \in [-0.05, 0.05]$ 。

(2) 亩产量变化约束。所有作物的亩产会有一定波动, 即 $y_{jt} = y_{j,t-1} \times (1 + \delta_j)$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ 。其中, y_{jt} 表示第 j 种作物在第 t 年的亩产量; $\delta_j \in [-0.10, 0.10]$ 是亩产量的年变化率, 反映气候等不确定因素对亩产量的影响。

(3) 种植成本变化约束。所有作物的种植成本每年平均增长 5%, 即 $c_{jt} = c_{j,t-1} \times (1 + 0.05)$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ 。其中, c_{jt} 表示第 j 种作物在第 t 年的种植成本。

(4) 销售价格变化约束。对于粮食类作物(小麦和玉米), 销售价格保持不变, 即 $p_{jt} = p_{j,t-1}$, $j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 。对于蔬菜类作物, 销售价格每年增长 5%, 即 $p_{jt} = p_{j,t-1} \times (1 + 0.05)$, $j \in \{17, 18, \dots, 37\}$ 。对于食用菌类作物, 销售价格下降, 其中羊肚菌为: $p_{jt} = p_{j,t-1} \times (1 - 0.05)$, $j \in \{41\}$; 其他食用菌为: $p_{jt} = p_{j,t-1} \times (1 - \epsilon_j)$, $j \in \{38, 39, 40\}$, $\epsilon_j \in [0.01, 0.05]$ 。其中, p_{jt} 表示第 j 种作物在第 t 年的销售单价。

综上所述, 要增加的约束条件如式(13)所示。

$$\left\{ \begin{aligned} & A_{jt} = A_{j,t-1} \times (1 + g_j) \quad g_j \in \begin{cases} [0.05, 0.10] & j \in \{6, 7\} \\ [-0.05, 0.05] & j \notin \{6, 7\} \end{cases} \\ & y_{jt} = y_{j,t-1} \times (1 + \delta_j) \quad \delta_j \in [-0.10, 0.10] \\ & c_{jt} = c_{j,t-1} \times (1 + 0.05) \\ & p_{jt} = \begin{cases} p_{j,t-1} & j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \\ p_{j,t-1} \times (1 + 0.05) & j \in \{17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, \\ & 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37\} \\ p_{j,t-1} \times (1 - 0.05) & j \in \{41\} \\ p_{j,t-1} \times (1 - \epsilon_j) & j \in \{38, 39, 40\} \quad \epsilon_j \in [0.01, 0.05] \end{cases} \end{aligned} \right. \quad (13)$$

根据上述优化模型, 可以求解 2024—2030 年的种植方法。

5 假设各项条件有内在联系下的种植策略

进一步综合考虑农作物之间的可替代性和互补性,分析预期销售量与销售价格、销售量与种植成本、不同作物销售价格之间的关系,从而制定种植策略。

5.1 预期销售量与种植成本、销售价格之间的相关性分析

为进一步分析作物各因素以及作物间作用对最终种植方案的影响,考虑采用相关分析、比较分析等研究方法,深入阐述模型所涉及的核心变量之间的关系,为后续模型优化与求解提供可靠依据^[24]。本文选择使用Spearman相关系数分析预期销售量、销售价格和种植成本之间的相关性,得到预期销售量、成本、销售单价之间的相关性。

5.1.1 种植成本与预期销售量的相互关系

分析结果显示,种植成本与预期销售量之间的Spearman相关系数为0.225,表示二者存在较弱的正相关关系。相关性显著性水平为0.012,小于0.05,说明在5%的显著性水平下可以拒绝零假设。这表明,随着种植成本的增加,预期销售量也呈现出一定程度的增加趋势。

5.1.2 销售价格与预期销售量的相互关系

分析结果显示,平均销售价格与预期销售量之间的Spearman相关系数为0.049,接近于0,且显著性水平为0.588,大于0.05。这说明在5%的显著性水平下无法拒绝零假设,即平均销售单价与预期销售量之间没有显著的相关性,单价变化对预期销售量没有明显影响。

5.2 农作物之间的可替代性与互补性分析

除单变量间的关系外,多作物协同种植的效果同样重要,因而本文对作物间的替代性与互补性进行分析,为优化算法提供指导。

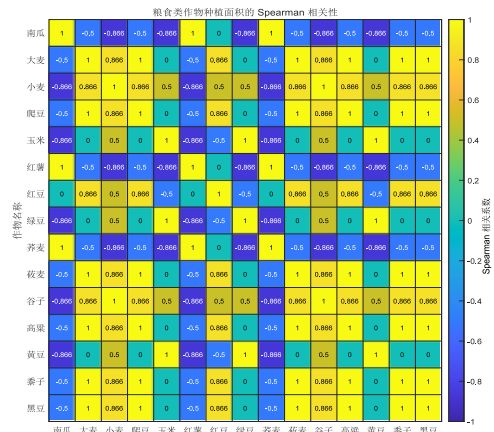
考虑到作物组合对总产量有着显著影响^[26-27],以及不同类别的农作物在可种植土地类型和可种植时间上的限制,在分析可替代性与互补性时,可以将范围限定在同一农作物类别中。分析同一类别的农作物时,结合种植面积、种植时间等因素,进行同一类别中各作物之间的相关性分析,并绘制出相关性热力图。若两作物之间呈现负相关性,则可视作两者间具有可替代性;若呈现正相关性,则可视作两者间具有互补性。

5.2.1 粮食类作物可替代性与互补性分析

图1(a)表示农作物之间正相关到负相关的变化。通过分析热力图,可以发现粮食类作物中,大麦、黑豆、黍子、高粱、谷子、莜麦、爬豆、红豆、小麦、玉米、绿豆、谷子之间呈现明显正相关性,表明这些作物之间是互补关系。而这些作物与南瓜、红薯、荞麦负相关,即这些作物与南瓜、红薯与荞麦呈现可替代性。

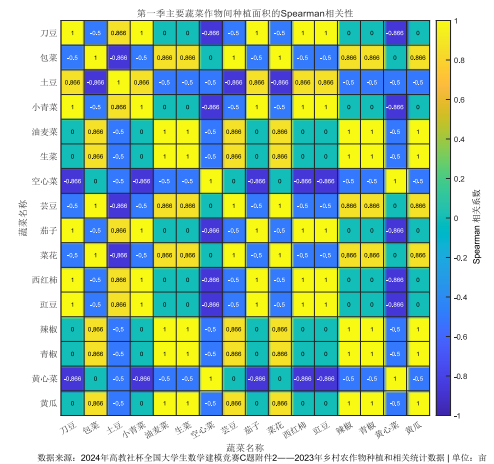
5.2.2 蔬菜类作物可替代性与互补性分析

由于大白菜、白萝卜与红萝卜只能在水浇地中的第二季种植,在分析蔬菜类时可以将这三种蔬菜单独进行分



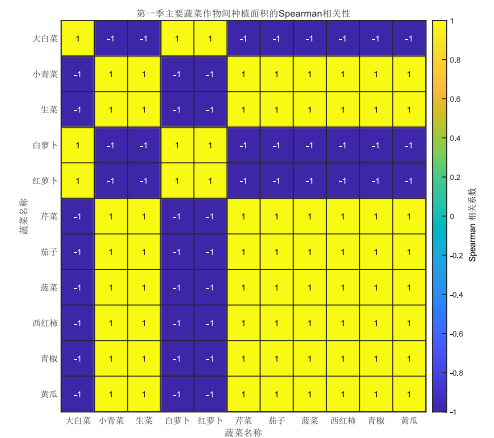
(a) Correlation heatmap of grain crops

(a) 粮食类作物相关性热力图



(b) Correlation heatmap of vegetables (excluding Chinese cabbage, white radish, and red radish)

(b) 蔬菜类作物相关性热力图(除大白菜、白萝卜、红萝卜外)



(c) Correlation heatmaps of Chinese cabbage, white radish and red radish

(c) 大白菜、白萝卜与红萝卜的相关性热力图

Fig. 1 Comparison of correlation heatmaps among different crop types

图1 各类作物间相关性热力图比较

析,下文简称这三种蔬菜为“三蔬”。

(1)除三蔬外蔬菜的分析。由图 1(b)可知,彼此之间呈现正相关的作物可以分为 3 个组合,分别是空心菜、黄心菜组合,油麦菜、生菜、芸豆、包菜、菜花、辣椒、青椒、黄瓜组合,以及茄子、西红柿、豇豆、土豆、小青菜、刀豆组合,而这 3 个组合中的任意一个组合都与其他组合的蔬菜呈现负相关。通过上述分析可知,上述每个组合中的蔬菜彼此都具有互补性,而与其他组合蔬菜具有可替代性。

(2)三蔬分析。通过分析图 1(c)可知,大白菜、白萝卜与红萝卜呈正相关性,即三者具有互补性。

5.2.3 食用菌类作物可替代性与互补性分析。

由于食用菌类作物的可种植时间、可种植土地以及各种食用菌的种植面积相同,因此食用菌类中的作物具有可替代性。

5.3 模型分析

基于上述对波动因素、作物相关性及作物间互补性的分析结果,本文在第 3.4 节将这些信息加以整合,建立了适合进化策略优化的模型框架,从而实现全局种植优化。

5.3.1 进化策略优势

选择进化策略的理由主要包括如下方面:

(1)自适应变异能力。考虑到本文决策变量存在连续与离散组合的特性,且部分约束维度较高,进化策略能够根据种群状态自适应调整变异步长和方向,从而在搜索空间中保持较强的局部探索能力^[28]。在混合整数非线性规划问题中,通过对整数变量进行离散化处理(如随机舍入),进化策略可在一定程度上兼顾连续和离散决策变量的优化。相比之下,遗传算法需人工调整交叉和变异参数,分布估计算法则依赖复杂概率模型,可能无法充分考虑约束的交互影响。

(2)并行性与实时性。进化策略的变异操作相互独立,天然易于开展并行计算,对于大规模问题而言可加快收敛速度^[28-29]。遗传算法交叉操作依赖于个体之间的信息交换,分布估计算法需进行全局模型更新,计算所产生的开销较大,在多核或者分布式计算环境下,进化策略具有计算效率上的较大优势。

(3)编码灵活性与约束处理。进化策略能够直接处理连续变量,并通过随机舍入处理整数变量,避免了遗传算法中解码的复杂性^[31]。模型将作物信息矩阵作为决策变量导入,将约束条件与目标函数进行联合优化,使种群仅以目标值为导向进行进化,无需执行复杂的双亲选择与交叉操作,从而搭建起进化策略框架。

进化策略在自适应参数调节、局部搜索能力、并行计算效果以及对混合约束问题的适应度上,有较为突出的优势。通过使种群大小和作物信息矩阵尺寸相契合,模型能够兼顾全局搜索和局部优化,达成地块类型的全局种植最优。

5.3.2 参数设置

为了让进化策略模型在全局寻优时有良好的稳定性和收敛性,本文在 MATLAB 环境中进行了参数调整和多次仿真测试,最终所确定的主要参数设置如下:

(1)种群规模为 80。鉴于此模型维度是比较高的(41 种作物×6 类地×7 年×2 季),过小的种群可能会导致搜索空间不足,而规模过大则会显著增加计算开销,利用对[40, 100]四组参数所进行的对比测试,规模 80 于计算效率和收敛精度之间达成了比较理想的均衡状态。

(2)迭代代数为 60。随着迭代次数的增加,个体适应度在第 45 代后逐渐趋于收敛,经过 60 代迭代,算法可实现充分进化。

(3)变异率为 0.25。每代选取 25% 的个体执行高斯扰动,以保证种群具有多样性,之后采用噪声尺度参数 noiseScale,结合地块总面积作比例上的扰动。

(4)选择与保留策略。每一代留下前 20%(16 个)个体作为精英个体,直接进入下一代,其余个体则通过对精英个体的随机选择与高斯变异生成。

(5)变异操作。在每一年度、每一季的作物面积矩阵中引入服从 $N(0, 0.05 \times S_i)$ 的随机扰动。随后,进行归一化处理,确保每类地块面积不超过 $1.05 \times S_i$,并保证得到的值非负。

(6)离散化处理。就 E、F 类地块作物面积而言,采用概率性取整规则(将取值限制为{0, 0.3, 0.6}),以模拟山区和林下经济作物的离散分布特性。

最终输出变量 best 代表了所有可行解中综合收益最高的种植方案,属于一个四维矩阵: $best(j, i, t, s)$ 。其中, j 为作物编号(1-41), i 为地块类别(A-F), t 为年份(2024-2030), s 表示季(1 或 2)。矩阵元素值代表该作物在对应地块、年度与季节的最优种植面积(亩)。

5.4 实验结果分析

根据多次随机初始种群实验结果,本文对优化方案与基线方案的收益进行了统计分析和 t 检验。实验结果如下:

(1) t 检验结果。 $h=1, p=0.000 1$, 表明优化方案的收益显著高于基线方案,统计学上具有高度显著性。

(2)平均收益。基线方案平均收益为 13 514 349 926.79 元,而优化方案平均收益为 118 478 871 921.80 元。优化方案较基线方案平均收益提高约 1.05×10^{11} 元,提升幅度约 776%。

(3)收益波动。基线方案收益标准差为 10 014 552 978.69 元,优化方案收益标准差为 108 009 536 287.03 元,表明优化方案在不同实验条件下仍保持高收益水平,但波动范围较大,符合多因素随机扰动的预期。

(4)正收益示意。平均正收益(收益相对基线的提升)为 1.05×10^{11} 元,显示优化模型在实际应用中可为决策者带来显著经济效益。优化收益标准差为 1.08×10^{11} 元,说明在

不同随机初始条件下,优化策略仍具较强稳定性和可重复性。

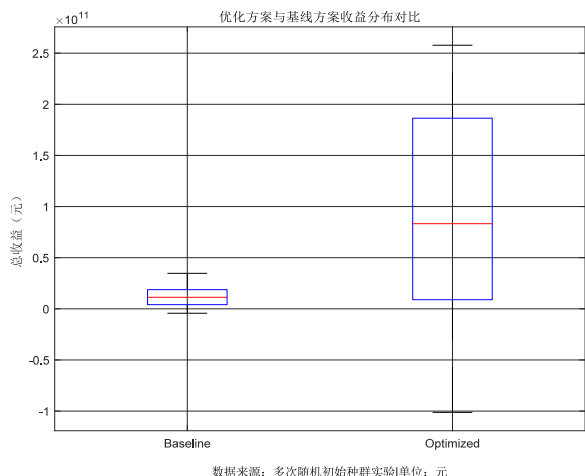


Fig. 2 Revenue distribution comparison of optimized scheme and baseline scheme

图2 优化方案与基线方案收益分布比较

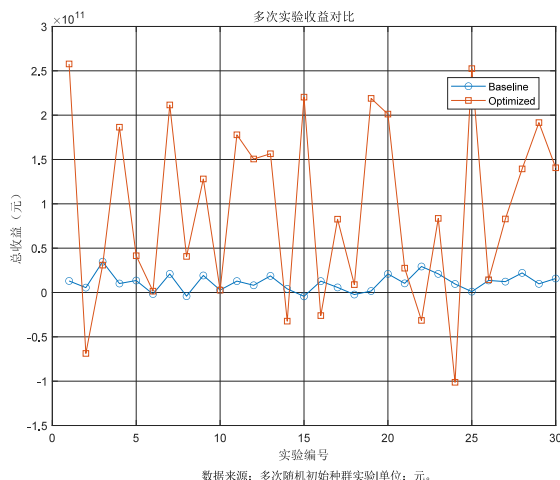


Fig. 3 Comparison of revenues across multiple experiments

图3 多次实验收益比较

图2直观显示收益差异、平均值及波动范围,图3展示了不同实验编号下收益的变化趋势和优化效果的稳定性。

综上所述,基于进化策略的全局种植优化模型在综合收益方面表现出明显优势,能够有效提升整体收益水平,验证了模型设计与算法选择的有效性、可行性。

最后,通过时序收益趋势图展示了优化策略在未来7年的可行性与稳定性,为实际应用提供参考。

模型分析表明,本文方法在农作物优化种植问题上具有较好的适用性和扩展性。时序趋势分析结果如图4所示,在2024—2030年间,该优化策略能够维持稳定的收益增长,表现出较强的市场适应能力。混合整数线性规划模型保证了对复杂种植约束的严格控制,而进化策略通过全局搜索机制有效规避了局部最优陷阱,提升了方案优化能力。

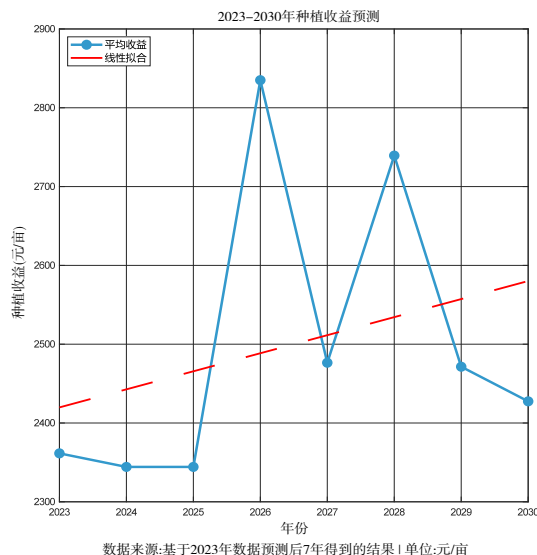


Fig. 4 Overall revenue trend analysis during 2023—2030

图4 2023—2030年整体收益趋势分析

6 结语

本文针对乡村农作物种植的优化相关问题,提出了一种将混合整数线性规划与进化策略相结合的优化办法,目的是使种植收益最大化。在研究开展过程中,本文搭建了契合土地类型、轮作要求、市场价格等约束条件的数学模型,并依靠不确定性分析(如销售量波动、气候变化及成本增加)优化长期种植策略。本文通过Spearman相关性分析对作物间的替代性与互补性进行评估,并结合进化策略优化算法加强方案适应性。实验结果表明,该优化方案能够更高效地适应市场需求和环境变化,增加种植收益,还显示出良好的稳定性和推广作用。

同时,本文研究存在一定的局限性:数据建模主要依赖2023年单年数据,样本量较小,有影响预测准确性的可能;部分数据(如市场环境、销售量等)采用平均值替代,与实际生产中的动态表现存在差异。为进一步研究本文算法解决实际情况的能力,采用随机抽样方法,在未来5年需求量上附加 $\pm 5\%$ 的波动,所得最终分析结果与现有结果没有显著不同之处,这进一步证实了本文假设及所建立模型具备合理性与有效性。

未来可从如下方向加以拓展:(1)开拓数据来源方式,结合历史种植数据,提高预测精准程度,使模型能够用于更广泛的农业生产环境;(2)深化不确定性建模的优化工作,引入更复杂的气候与市场波动预测模型,提升模型鲁棒性,再开展深入的敏感性分析;(3)拓展模型应用领域,其不仅限于农作物种植优化,更可推广至畜牧业、水产养殖等农业生产决策相关方面,如饲料配比、繁殖策略优化等,以增加农业生产综合效益。

本文研究为农业种植优化提供了一种新的数学建模

与智能优化办法, 在乡村农业管理与决策支持系统内具有良好应用前景。

参考文献:

- [1] XU N. Evolution of China's grain security strategy and construction of a security system[J]. *Agricultural Economy*, 2024(12): 3-6.
徐宁. 我国粮食安全战略演变与保障体系构建[J]. *农业经济*, 2024(12): 3-6.
- [2] YUAN Z C, YANG L, TIAN J L, et al. Dual-population dual-stage evolutionary algorithm for complex constrained multi-objective optimization problems[J]. *Journal of Computer Applications*, 2025, 45(8): 2656-2665.
袁志超, 杨磊, 田井林, 等. 面向复杂约束多目标优化问题的双种群双阶段进化算法[J]. *计算机应用*, 2025, 45(8): 2656-2665.
- [3] Contemporary Undergraduate Mathematical Contest in Modeling. CUMCM-2024 contest problems[EB/OL]. https://www.mcm.edu.cn/html_cn/node/a0c1fb5c31d43551f08cd8ad16870444.html.
中国大学生数学建模竞赛. 2024年高教社杯全国大学生数学建模竞赛赛题[EB/OL]. https://www.mcm.edu.cn/html_cn/node/a0c1fb5c31d43551f08cd8ad16870444.html.
- [4] ALOTAIBI A, NADEEM F. A review of applications of linear programming to optimize agricultural solutions[J]. *International Journal of Information Engineering and Electronic Business*, 2021, 13(2): 11-21.
- [5] ANNETTS J E, AUDSLEY E. Multiple objective linear programming for environmental farm planning[J]. *Journal of the Operational Research Society*, 2002, 53(9): 933-943.
- [6] FILIPPI C, MANSINI R, STEVANATO E. Mixed integer linear programming models for optimal crop selection[J]. *Computers & Operations Research*, 2017, 81: 26-39.
- [7] BI C N, SUN B, XUE J, et al. Optimization of crop planting structure under water resource constraints in the downstream estuary area of the Yellow River[J]. *Yellow River*, 2024, 46(12): 117-122.
毕春宁, 孙斌, 薛建, 等. 水资源约束下的黄河下游河口区作物种植结构优化研究[J]. *人民黄河*, 2024, 46(12): 117-122.
- [8] GE H T, GÓMEZ M, PETERS C. Modeling and optimizing the beef supply chain in the Northeastern US[J]. *Agricultural Economics*, 2022, 53(5): 702-718.
- [9] LYU C Y. Cost-benefit analysis of beef cattle farming in Jilin Province driven by new quality productivity-based on mixed integer linear programming model[J]. *Special Economic Animals and Plants*, 2024, 27(12): 183-186.
吕楚源. 新质生产力驱动下吉林省肉牛养殖成本收益分析——基于混合整数线性规划模型[J]. *特种经济动植物*, 2024, 27(12): 183-186.
- [10] YANG X L, YIN D, LI X J, et al. Study on optimal scheme of crop planting structure in Pingliang[J]. *Agricultural Research in the Arid Areas*, 2003(3): 65-68.
杨小利, 尹东, 李晓娟, 等. 平凉市农作物种植结构最优方案研究[J]. *干旱地区农业研究*, 2003(3): 65-68.
- [11] SÜNNEMANN M, BEUGNON R, BREITKREUZ C, et al. Climate change and cropland management compromise soil integrity and multifunctionality[J]. *Communications Earth & Environment*, 2023, 4: 394.
- [12] GALAN-MARTIN A, POZO C, GUILLEN-GOSALBEZ G, et al. Multi-stage linear programming model for optimizing cropping plan decisions under the new common agricultural policy[J]. *Land Use Policy*, 2015, 48: 515-524.
- [13] HOLZKAEMPER A, KLEIN T, SEPPELT R, et al. Assessing the propagation of uncertainties in multi-objective optimization for agro-ecosystem adaptation to climate change[J]. *Environmental Modelling and Software*, 2015, 66: 27-35.
- [14] AKHAVIZADEGAN F, ANSARIFAR J, WANG L, et al. Risk-averse stochastic optimization for farm management practices and cultivar selection under uncertainty[DB/OL]. <https://arxiv.org/abs/2208.04840>.
- [15] REIS S A, LEAL J E, THOME A M T. A two-stage stochastic linear programming model for tactical planning in the soybean supply chain[J]. *Logistics-Basel*, 2023, 7(3): 49.
- [16] HUANG Y M, HASUIKE T. Optimization models for crop planning problem under uncertainty in free market and contract farming scenarios[C]// *IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management*, 2023: 1101-1127.
- [17] GUO X X, LI K L, LIU Y Z, et al. Toward the economic-environmental sustainability of smallholder farming systems through judicious management strategies and optimized planting structures[J]. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 2022, 165: 112619.
- [18] CHU Q P. The research of the interaction of plants under different planting densities and species[D]. Lanzhou: Lanzhou University, 2021.
楚启鹏. 不同种植密度与物种组合下植物相互作用的研究[D]. 兰州: 兰州大学, 2021.
- [19] YAO W Z, SUN Y C, LIU P, et al. Research on collaborative distribution model of fresh products considering product losses[J/OL]. *Systems Engineering—Theory & Practice*, 2025-01-08. <https://link.cnki.net/urlid/11.2267.N.20250108.1411.006>.
饶卫振, 孙远辰, 刘鹏, 等. 考虑产品损耗的生鲜产品协作配送模式研究[J/OL]. *系统工程理论与实践*, 2025-01-08. <https://link.cnki.net/urlid/11.2267.N.20250108.1411.006>.
- [20] JIANG H P, YAO J, YANG J H. Pitfalls of China's food security guarantee in the new era and suggestions for solving them[J]. *Academic Journal of Zhongzhou*, 2019(12): 35-41.
蒋和平, 尧珏, 杨敬华. 新时期中国粮食安全保障的隐患与解决建议[J]. *中州学刊*, 2019(12): 35-41.
- [21] DI F X. Logistics cost accounting of edible fungi under the background of e-commerce[J]. *Edible Fungi of China*, 2021, 40(2): 141-143.
狄方馨. 电商背景下食用菌物流成本会计核算[J]. *中国食用菌*, 2021, 40(2): 141-143.
- [22] WANG S. Analysis on the change characteristics of crop planting area in Liaoning province[J]. *Agricultural Science & Technology and Equipment*, 2024(5): 89-91.
王帅. 辽宁省农作物种植面积的变化特征分析[J]. *农业科技与装备*, 2024(5): 89-91.
- [23] LEE C C, ZENG M L, LUO K. How does climate change affect food security? evidence from China[J]. *Environmental Impact Assessment Review*, 2024, 104: 107324.
- [24] WANG L M, LIU J, JI F H, et al. Analysis of spatial-temporal dynamic change of wheat planting structure of China[J]. *Chinese Agricultural Science Bulletin*, 2019, 35(18): 12-23.
王利民, 刘佳, 季富华, 等. 中国小麦面积种植结构时空动态变化分析[J]. *中国农学通报*, 2019, 35(18): 12-23.
- [25] LIANG L F, PEI S L, ZHANG Q D, et al. Analysis of interspecific associations of dominant species in Shanxi *Xanthoceras sorbifolia* communities[J]. *Forest Resources Management*, 2018(4): 76-83.
梁林峰, 裴淑兰, 张钦弟, 等. 山西文冠果群落优势物种间关联性分析[J]. *林业资源管理*, 2018(4): 76-83.
- [26] ZHU Q. Effects of planting patterns, crop combinations and species diversity on productivity of dryland farmland in semi-arid regions[D]. Lanzhou: Lanzhou University, 2017.
朱倩. 种植模式、作物组合和物种多样性对半干旱区旱地农田生产力的效应[D]. 兰州: 兰州大学, 2017.
- [27] ZHANG Z H, ZHANG X L, LOU Y, et al. Effect of crop structure on nitrogen and phosphorus output in farmland catchment of Dali Gusheng area[J]. *Journal of Agro-Environment Science*, 2025, 44(1): 140-152.
张梓涵, 张旭琳, 娄颢, 等. 作物结构对大理古生片区农田集水区氮磷输出的影响[J]. *农业环境科学学报*, 2025, 44(1): 140-152.
- [28] HANSEN N, OSTERMEIER A. Completely derandomized self-adaptation in evolution strategies[J]. *Evolutionary Computation*, 2001, 9(2): 159-195.
- [29] KHAN N. A parallel implementation of the covariance matrix adaptation evolution strategy[DB/OL]. <https://arxiv.org/abs/1805.11201>.
- [30] DUAN Q Q, SHAO C, ZHOU G C, et al. Distributed evolution strategies with multi-level learning for large-scale black-box optimization[J]. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 2024, 35(11): 2087-2101.
- [31] HANSEN N, ARNOLD D V, AUGER A. Evolution strategies[M]. Berlin: Springer, 2025: 871-898.

(责任编辑: 孙 娟)