

CoT_MathTutor: 基于思维链与大语言模型的 启发式数学教学系统

金云鹏, 莫路锋, 屠国青

(浙江农林大学 数学与计算机科学学院, 浙江 杭州 311300)

摘要: 针对当前大语言模型(LLM)技术在教学中的答案泄露、策略不可控和引导有效性不足等关键问题, 聚焦数学智能辅导场景设计了一种基于思维链(CoT)与大语言模型的引导式数学教学系统CoT_MathTutor。首先, 将大语言模型与思维链相结合, 通过有限状态机机制约束LLM的生成过程, 实现了可控的渐进式启发教学; 其次, 提出Step-CoT方法对每一条解题步骤进行细粒度的结构化拆解, 将宏观的解题思路转化为逻辑严密、语义明确的多步链式结构, 以促进自主推理能力的培养。实验表明, 在小学数学应用题辅导任务中, 基于GPT4的CoT_MathTutor系统的问题解决成功率提升了18%, 教学评分提高了0.18, 展示出了强大的动态适应性与策略灵活性, 相较于开放生成的GPT-4提升显著。系统模块化设计不仅保证了教学策略的可控性, 还为后续教学方法的优化和扩展提供了灵活框架, 为LLM在教育领域的应用提供了重要参考, 推动了智能辅导系统向更有效、更可控的方向发展。

关键词: 大语言模型; 思维链; 数学辅导; 启发式教学; 状态机; 智能教育

DOI: 10.11907/rjdlk.251815

扫描二维码阅读全文:



中图分类号: G434

文献标识码: A

文章编号: 1672-7800(XXXX)0XX-0001-08

CoT_MathTutor: A Heuristic Math Teaching System Integrating CoT and LLM

JIN Yunpeng, MO Lufeng, TU Guoqing

(College of Mathematics and Computer Science, Zhejiang Agricultural and Forest University, Hangzhou 311300, China)

Abstract: Aiming at the key problems of answer leakage, uncontrollable strategies, and insufficient guidance effectiveness in the current Large Language Model (LLM) technology in teaching, a guided mathematics teaching system, CoT_MathTutor, based on the thinking chain and LLM, was designed with a focus on the scenario of mathematical intelligent tutoring. Firstly, by combining the big language model with the thought chain and constraining the generation process of LLM through a finite state machine mechanism, a controllable progressive heuristic teaching has been achieved; Secondly, the StepCoT method is proposed to break down each problem-solving step into a fine-grained structured structure, transforming macro problem-solving ideas into a logically rigorous and semantically clear multi-step chain structure, in order to promote the cultivation of students' autonomous reasoning ability. Experiments have shown that in primary school mathematics application problem tutoring tasks, the problem solving success rate of the CoT_MathTutor system based on GPT4 has increased by 18%, and the teaching score has increased by 0.18, demonstrating strong dynamic adaptability and strategic flexibility. Compared with the open generation GPT-4, the improvement is significant. The modular design of the system not only ensures the controllability of teaching strategies, but also provides a flexible framework for optimizing and expanding subsequent teaching methods, providing important references for the application of LLM in the field of education and promoting the development of intelligent tutoring systems towards more effective and controllable directions.

Key Words: LLM; CoT; math teaching; heuristic teaching; state machine; intelligent education

0 引言

随着人工智能技术的快速发展, 个性化教育和智能辅

导系统(Intelligent Tutoring Systems, ITS)成为了教育领域的研究热点^[1]。从最早的智能辅导系统到如今的大语言模型(Large Language Model, LLM)驱动的AI教师, 人工智能的应用在教育中的潜力不断被挖掘, 并取得了显著进

收稿日期: 2025-12-15

作者简介: 金云鹏(1999-), 男, CCF会员, 浙江农林大学数学与计算机科学学院硕士研究生, 研究方向为人工智能; 莫路锋(1979-), 男, 博士, 浙江农林大学数学与计算机科学学院教授, 研究方向为农业物联网技术、计算机视觉; 屠国青(1979-), 女, 浙江农林大学数学与计算机科学学院工程师, 研究方向为农林业信息化。本文通讯作者: 屠国青。

展^[2,3]。传统数学教学模式以教师统一讲解和学生被动接受为主,缺乏对个体差异的有效响应^[4]。在复杂问题求解过程中,学生往往缺乏清晰的解题路径,容易出现推理跳跃或理解偏差。研究表明,一对一辅导在提升学习效果方面具有显著优势,但其高成本特性限制了大规模应用^[5]。为了缓解这一问题,研究者提出 LISP Tutor、AutoTutor 等基于计算机的自动化辅导系统,通过规则脚本与自然语言交互模拟教师引导过程,但系统高度依赖人工规则设计,扩展性与灵活性有限,难以适应开放式问题场景^[6,7]。

随着以 GPT-4、LLaMA、ChatGLM、DeepSeek 等大语言模型在自然语言理解与生成方面能力的提升,基于 LLM 的智能教学方法逐渐受到关注^[8-12]。在数学问题求解领域,研究者提出多种利用 LLM 推理能力的方法,例如基于思维链(Chain of Thought, Cot)的提示工程,通过显式生成中间推理步骤来提升解题准确性^[13,14]。与此同时,一些教育系统开始引入个性化学习机制,例如基于学习数据分析的学习管理系统 LMS。Coursera、Khan Academy 等自适应学习平台利用学生历史行为记录,对学习内容与路径进行推荐^[15,16]。

在更复杂的教学交互场景中,部分研究尝试通过系统级设计提升教学过程的灵活性与真实感。例如,SimClass 系统通过多代理协作模拟虚拟课堂环境,并结合大语言模型实现个性化教学互动与解题引导^[17]。这些工作在一定程度上拓展了 LLM 在教育场景中的应用边界,但现有方法

仍普遍存在推理过程不可控、交互流程难以约束、中间决策缺乏可解释性等问题,尤其在多步骤的数学辅导任务中表现更为明显。

为此,本文将大语言模型、思维链与有限状态机相结合,提出一种面向数学教学、具有可控引导能力与个性化适应性的智能教学系统架构 CoT_MathTutor^[18]。

1 总体设计

1.1 系统总体架构

图 1 为 CoT_MathTutor 系统总体架构。在提示模板约束下,系统利用大语言模型为数学问题生成多条逻辑一致的解题路径,并将其组织为多路径解题树结构。解题树以起始问题为根节点,不同解题策略在后续步骤中分化形成解题分支。在此基础上,本文引入结构化思维链方法 StepCoT,将解题过程表示为由步骤目标、推理过程、计算表达、关键见解、相关概念等要素构成的多步结构(如 S1、S2、S3),以支持学生进行作答分析与教学反馈。

为了评估学生在解题过程中的认知状态,设计由路径匹配、公式匹配和数值匹配组成的三级匹配机制,对学生每一步作答进行结构化评估,并据此判定学生所处的解题阶段。系统采用有限状态机对教学交互过程进行调度,根据匹配结果动态切换教学状态,并调用相应的提示策略生成引导与反馈。基于评估结果,系统将进一步生成结构化

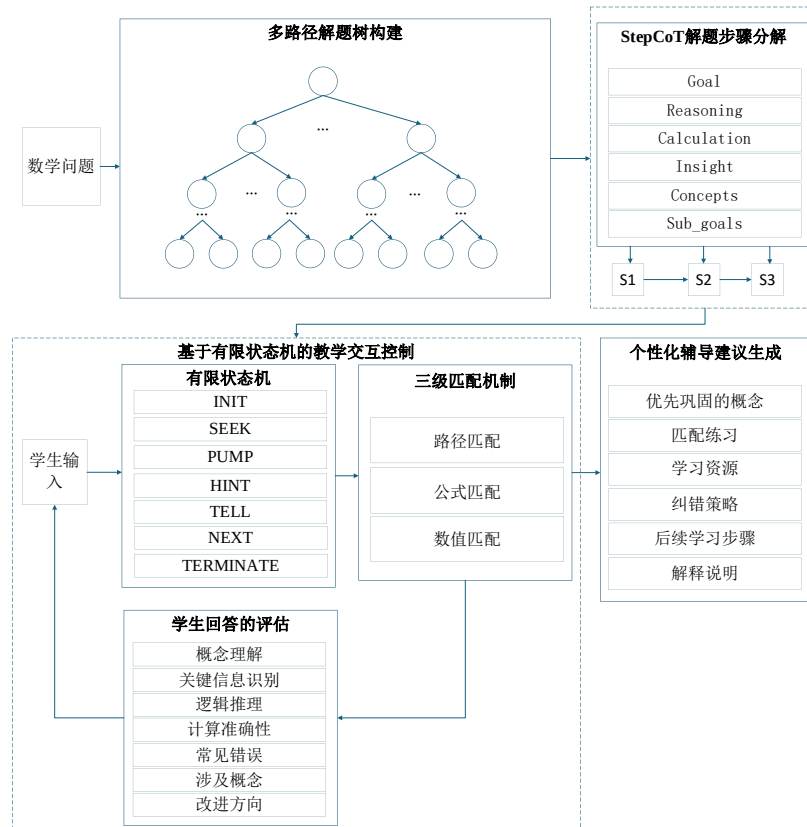


Fig. 1 CoT-MathTutor system architecture

图 1 CoT_MathTutor 系统架构

的个性化辅导建议,实现与学生认知状态对齐的渐进式教学。

在整体体设计中,提示模板是大语言模型生成行为的关键机制,依靠有限状态机在不同教学阶段进行动态调度。在构建解题树和步骤分解阶段,分别运用统一的问题理解模板以及多要素提示模板来规范模型输出。在教学交互与反馈生成环节,系统依据评估结果生成有针对性的提示,进而构建可控的教学闭环。

1.2 多路径解题树构建

解题树是一种将问题求解过程用结构化形式表示的结构,节点代表解题步骤或决策点,分支表示不同的解题选择路径。本文提出一种基于思维链的多路径解题树构建方法,依据大语言模型为数学问题自动生成多条逻辑一致的解题路径,且以树形结构组织路径,用于支持后续的路径选择与学习过程分析。同时,为了确保解题思路的多样性,在构建多路径解题树时包含以下两个核心阶段:

(1)第二层节点生成。解题树的根节点就是原始问题,其子节点(第二层节点)是不同解路径的第一步。本文依据提示模板(见表 1),调用 LLM 生成不同的初始解策略。系统经此设计能生成不同思路的子节点(见图 2),例如计算折后价、先求总价或先求总折扣额等,为后续路径扩展奠定基础。

(2)后续子节点扩展。在现有节点基础上,系统会继续调用大语言模型生成可能的下一步操作。该阶段的提

Table 1 First-step path prompt template

表 1 首条路径提示模板

指令组成	内容
任务描述	给定一个数学应用题,识别可能的首个解题步骤
当前状态	当前阶段:问题起始阶段
已完成步骤	已完成步骤:无
输出形式	生成可能的首步解题思路

示模板提供了问题描述、标准答案、已完成步骤以及当前的步骤信息,用于约束生成结果在逻辑和数学上的一致性(见表 2)。生成的子节点会形成多条候选解题路径,其中有些路径存在推理错误或结果不一致的情况,这些路径会被筛除,剩下的就是逻辑闭合且结果正确的路径集合。

Table 2 Follow-up path prompt template

表 2 后续路径提示模板

指令组成	内容
任务描述	给定一个数学应用题,生成当前步骤之后可能的下一步解题操作
问题输入	问题描述: {self.problem}
最终答案	标准答案: {self.correct_answer}
已完成步骤	已完成的解题步骤: {completed_steps}
当前步骤	当前解题步骤: {current_desc}({current_eq})
输出要求	生成可作为下一步的解题步骤。

本文以折扣计算问题为例,其多路径解题树结构如图 2 所示,不同分支对应不同的解题策略。

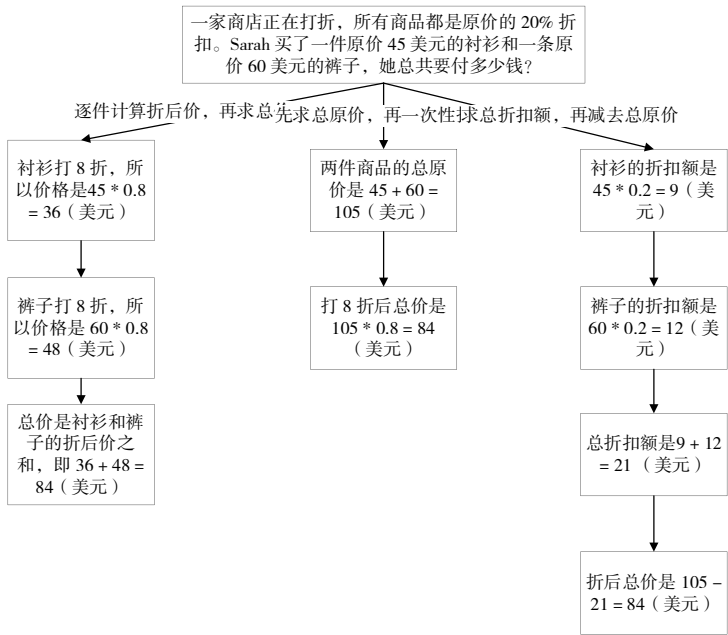


Fig. 2 Example of problem-solving tree

图 2 解题树示例

1.3 基于有限状态机的教学交互控制

为了实现教学引导过程的渐进式推进,引入有限状态机对教学交互流程加以控制。系统先将学生解题时的交互行为抽象成有限状态集合,再根据学生作答的表现和评估结果动态切换教学状态,就能让教学策略在不同阶段执

行,控制节奏。

1.3.1 状态集合

系统将学生的学习交互过程建模为以下 7 个状态。根据学生行为动态切换不同状态,以控制教学内容的适时推送与策略更新。

$$S = \{\text{INIT}, \text{SEEK}, \text{PUMP}, \text{HINT}, \text{TELL}, \text{NEXT}, \text{TERMINATE}\} \quad (1)$$

式中:INIT为初始化状态,无直接响应,会自动转换到SEEK状态;SEEK为询问学生解题思路;PUMP为通过开放性提问引导学生深入思考;HINT为提供更具体的提示帮助学生;TELL为直接讲解解题步骤;NEXT为推进到下一个解题步骤;TERMINATE为结束教学对话并提供总结。

1.3.2 输入集合

有限状态机的输入由学生作答结果及系统内部控制条件构成:

$$A = \{\text{correct}, \text{incorrect}, \text{max_hints}, \text{last_step}, \text{max_turns}\} \quad (2)$$

式中:correct表示学生回答正确数量;incorrect为学生回答错误数量;max_hints为提示次数上限;last_step为当前是解题的最后一步;max_turns=60,防止系统进入死循环。

1.3.3 状态转移函数

系统状态转移函数为:

$$\delta: S \times A \rightarrow S \quad (3)$$

式中:S为状态集合;A为学生的回答和系统内部条件。

在每个状态,学生作出的回答均与三级匹配机制进行匹配并评估,匹配成功则推进到下一个解题步骤或答题结束,否则进入其他引导状态,具体状态转移如图3。

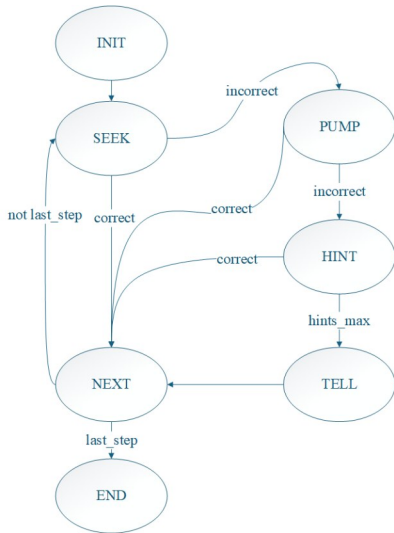


Fig. 3 Finite state machine

图3 有限状态机

CoT_MathTutor在状态SEEK时,发起引导式提问:Hi! Could you talk me through how you would solve this problem?当系统进入状态PUMP时,采用提示模板(见表3)创建一个开放式问题来引导学生思考。当系统进入状态HINT时,采用提示模板(见表4)创建一个生成具体提示的响应。HINT相较于PUMP可提供更具体的指导,包含解题方法的明确提示、相关公式、计算步骤、类似例题的解法。当系统进入状态TELL时,直接给出该步骤的分解与示范。

Table 3 PUMP state prompt template

表3 PUMP状态提示模板

指令组成	内容
任务描述	生成一个开放式引导问题,用于引导学生进一步思考当前解题步骤。
当前解题步骤	{self.current_step.thought_step.description}
学生上一轮回答	{self.last_utterance}
可能的后续步骤	{followups_text}
问题生成要求	生成的问题需满足以下条件:(1)有助于学生识别当前步骤中的关键信息(2)引导学生进行更深入的思考与推理(3)避免直接给出答案或明确解题步骤

Table 4 HINT state prompt template

表4 HINT状态提示模板

指令组成	内容
任务描述	生成一个教学提示,用于在不直接给出答案的情况下,对学生当前解题步骤提供更明确的引导。 生成的提示需满足以下要求: (1)相较于一般性提示,提供更为具体的解题引导 (2)揭示部分解题思路,但避免给出完整答案 (3)若当前步骤涉及计算:给出一个数值不同但方法相同的示例
引导要点	明确指出需要使用的数学运算或公式 (4)若当前步骤涉及概念理解:简要解释关键数学概念,说明该概念在当前问题中的具体应用方式 (5)引用题目中的具体数值或关键信息 (6)引导学生朝某一个可行的下一解题步骤推进
提示特性	(1)明确性高于一般性提问,但低于直接给出解题答案 (2)聚焦于当前的关键下一步 (3)与学生上一轮作答保持语义关联

2 问题分解与教学反馈方法

2.1 StepCoT解题步骤分解

为细致分析复杂数学问题并提供过程化教学支持,提出一种基于思维链的结构化解题步骤分解方法StepCoT。该方法以多路径解题树为基础,对每一条解题路径进行逐步拆解,将整体解题过程表示为逻辑连续、语义明确的多步结构。在StepCoT表示中,每个解题步骤 S_i 由6个语义单元构成。

$$S_i = \langle g_i, r_i, c_i, i_i, k_i, b_i \rangle \quad (4)$$

式中: g_i (goal, 目标)为明确该步骤的解题目标; r_i (reasoning, 推理过程)为解释完成该目标所依据的逻辑过程; c_i (calculation, 计算)表示形式化的数学操作; i_i (insight, 见解)为归纳该步骤的数学经验或关键知识点; k_i (concepts, 相关概念)为概括该步骤的相关数学概念集,例如“百分比计算”“乘法”; b_i (sub_goals, 子目标)为对当前步骤进一步拆解形成子任务。

基于定制提示模板(见表5),调用大语言模型将数学问题的解题步骤拆解为多个有序思维步骤。StepCoT将解题过程表示为语义明确、结构完整的多步链式结构,有效降低了推理跳跃与步骤混淆的风险,为后续学生作答分析、认知评估与教学反馈提供了统一的过程表示基础。

Table 5 Problem decomposition prompt template of StepCOT

表 5 StepCOT 的问题分解提示模板

指令组成	内容
任务描述	给定一个数学应用题,采用思维链方式对问题进行逐步拆解与推理。
分步要求	对于每一步解题过程,需给出以下要素:(1)当前步骤的具体目标(2)推理过程说明(3)必要的计算过程(如有)(4)本步骤获得的关键见解(5)涉及的数学概念(6)如需进一步拆分的子目标
问题输入	问题描述: {self.problem}
标准答案	最终答案: {self.correct_answer}
计算格式	计算格式要求: CALCULATION: [计算表达式] <<[表达式]=[计算结果]>> 示例: CALCULATION: $2 \times 3 + 4$ << $2 \times 3 + 4 = 10$ >>
步骤输出格式	每个解题步骤需按照以下格式输出: STEP [编号]: GOAL: 当前步骤目标 REASONING: 推理过程说明 CALCULATION: 计算过程(如有) IN-SIGHT: 关键见解 CONCEPTS: 涉及的数学概念 SUB-GOALS: 子目标(如需要)
说明	所有计算过程必须使用 <<[表达式]=结果>> 的统一格式,以保证计算结果的可解析性与一致性。

2.2 三级匹配机制与学生回答的评估

为了实现对 学生解题过程的精细化识别与可控引导,设计三级匹配机制对学生每一步作答进行结构化评估,并据此判定学生所处的解题阶段与认知状态,从而生成相应的辅导建议。

2.2.1 三级匹配机制

三级匹配机制通过路径匹配、公式判定、数值匹配等 3 个方面来精准识别学生的解题阶段和认知状态,为后续基于有限状态机的教学交互控制提供支持。

(1) 路径匹配。目标是判定学生作答的思路与解题树上的标准路径是否对齐。系统将学生的自然语言描述与当前步骤及其候选后继步骤进行语义比较,只在“清晰体现对该步骤意图与方法的 理解”时才视为路径匹配成功,若无后续步骤则为解题最后一步。需要注意的是,判定要点主要关注“goal”“reasoning”“concepts”的对齐,而非仅看答案是否正确;若路径不对齐,系统将优先给出引导式提问或局部提示,帮助学生回到正确的推理分支,而非直接给出答案。

(2) 公式匹配。在路径匹配成功后,进一步检查当前步骤是否包含计算公式。对于需要计算的步骤,系统从步骤描述和学生回答中提取公式表达式。随后,对提取出的公式加以严格验证,既要判定学生计算与标准计算在数学意义上是否等价,还要考虑数值结果一致性、运算结构、等价变换、单位换算等语义等价性。例如,对于百分比与乘法的互换形式,系统可将其正确识别。

(3) 数值匹配。在步骤里有公式,学生给出计算的情况下,系统会验证学生计算与标准计算在数学上的等价性,还会进行简单解释。

2.2.2 学生回答的评估

在每个解题步骤中,系统基于三级匹配结果对学生作答进行多维度结构化评估,评估内容涵盖 7 个方面,并以统一格式输出,为教学引导与反馈生成提供依据,具体评估维度及输出格式如表 6 所示。

例如,一家商店正在打折,所有商品都是原价的 20%。如果 Sarah 买了一件原本价值 45 美元的衬衫和一条原本价值 60 美元的裤子,她总共存了多少钱? 学生的解决方案为需要找到物品的原始总成本,对学生回答的评估输出如

Table 6 Student step evaluation prompt template

表 6 学生步骤评估提示模板

指令组成	内容
任务描述	分析学生针对当前解题步骤的回答,并给出结构化评估结果。
当前步骤	{self.current_step.thought_step.description}
期望推理	{self.current_step.thought_step.reasoning}
学生回答	{response}
评估维度	请从以下维度对学生回答进行分析,并给出结构化评估结果: (1)概念理解程度(0 - 100%)(2)关键信息识别能力(0 - 100%) (3)逻辑推理合理性(0 - 100%)(4)计算准确性(0 - 100%,如无计算则标注为 N/A)(5)存在的误解或错误(6)体现的相关概念 (7)建议重点关注与改进方向
输出格式	请严格按照以下格式输出: UNDERSTANDING: [评分] KEY_IN-FO: [评分] LOGIC: [评分] CALCULATION: [评分或 N/A] MIS-CONCEPTIONS: [列表] CONCEPTS: [列表] FOCUS: [列表]

图 4 所示。系统能对学生的解题状态进行详细诊断,评估机制不仅判断答案正确与否,还能从概念理解、关键信息识别、逻辑推理、计算执行等维度对学生作答进行量化分析与归因。例如,在学生尚未进入计算步骤时(图 2 中“CALCULATION: N/A”),系统仍能识别出其在“关键信息识别”(70%)与“逻辑推理”(70%)方面的不足,判断其处于“解题方向合理但表达与情境化不足”的中间状态。这种分层评估有效避免了传统教学中“过早纠错”或“反馈泛化”的问题,为后续的引导奠定了基础。

2.3 个性化辅导建议生成

CoT_MathTutor 基于学生步骤评估与三级匹配机制,生成针对每位学生的个性化辅导建议。大语言模型通过给定的提示词策略,分析学生在概念理解、关键点识别、逻辑推理、计算精度等方面的薄弱环节。例如,在概念理解不足的步骤中,提供详细的解释或示例题;在逻辑推理或解题步骤错误中,提供引导性问题梳理思路;在公式或计算错误时,提供正确的方法与练习题目,并推荐相应的薄弱知识点供学生复习。通过这种方式,使辅导建议与学生当前能力动态匹配,从而实现精准、渐进的个性化学习支持。最后,通过结构化格式向大语言模型发出提示请求,如表 7 所示。

例如,系统评估某学生对“节省比例计算”相关知识的掌握度仅为 0.6,且错误模式集中于“误用乘除运算符”后,系统将自动生成建议,如表 8 所示。

评估: 理解=80%, 概念=[确定起点, 认识到总原始成本的必要性]
了解: 80%
KEY INFO: 70%
逻辑: 70%
计算: 无
误解: []
概念: [确定起点, 认识到需要总原始成本]
重点: [澄清具体的问题背景, 确保理解“原始总成本”的含义, 鼓励在继续之前确定所有必要的步骤]

说明:
-学生很好地理解了找到总原始成本的必要性, 这是许多涉及成本和折扣的问题解决方案中合乎逻辑的第一步。
-关键信息的识别有点有限, 因为学生没有具体说明他们指的是什么项目或成本, 这可能会导致以后的混淆。
-逻辑推理是可以接受的, 因为学生正确地识别了成本相关问题的常见初始步骤, 但在没有更多背景的情况下, 尚不清楚这是否是手头特定问题最合适的第一步。
-没有计算, 因此此类标记为N/A。
-现阶段没有发现重大误解。
-学生表现出对确定起点和认识到总原始成本相关性的理解。
-建议的重点领域包括澄清问题背景, 确保学生理解他们正在计算的具体内容, 并鼓励学生在继续计算之前概述所有必要的步骤。

Fig. 4 Evaluation results of students' answer

图4 学生回答评估结果

Table 7 Request prompt

表7 请求提示

指令组成	内容
任务描述	基于学生的学习分析结果,生成个性化的学习建议与改进方案
当前学习状态	(1)概念掌握情况: {self._format_concept_mastery(analytics['concept_mastery'])}(2)常见错误模式: {self._format_error_patterns(analytics['error_patterns'])}(3)学习进度变化: {self._format_learning_curve(analytics['learning_curve'])}(4)近期学习表现: {analytics['recent_performance']}(5)学习风格特征: {analytics['learning_style']}
建议生成目标	请针对以下方面生成具体、可执行的学习建议:(1)需要优先巩固的核心概念(2)与当前能力水平匹配的练习内容(3)符合学习风格的学习资源推荐(4)针对常见错误模式的纠偏策略(5)后续学习与提升的具体步骤
输出格式	请生成针对以下方面的具体学习建议:(1)需要立即重点关注的核心概念(2)与学生当前水平相匹配的练习内容(3)符合学生学习风格的学习资源(4)针对已识别错误模式的具体纠偏策略(5)后续学习与能力提升的改进步骤 请按照以下结构输出个性化学习建议:PRIORITY_CONCEPTS:需优先关注和巩固的概念列表EXERCISES:与学生当前能力水平匹配的练习建议RESOURCES:符合学生学习风格的学习资源推荐ERROR_STRATEGIES:针对已识别错误模式的具体纠偏策略NEXT_STEPS:后续学习与改进的建议步骤EXPLANATION:对上述建议的综合说明与生成依据

Table 8 Personalized coaching advice

表8 个性化辅导建议

建议类别	示例内容
优先巩固的概念	节省与百分比的关系;总成本构建的认知路径
匹配练习	3道“在打折场景中计算节省金额”的练习题;1组“反推原价”的图示辅助题
学习资源	MathPlayground 百分比可视化工具;IXL 百分比训练模块;可汗学院视频“从折扣中学习百分比”
纠错策略	关键词识别—运算决策策略;单位匹配审查法;结构图辅助公式构建法
后续学习步骤	本周完成指定练习题组,掌握“节省百分比”与“总金额”的双向转换;使用推荐资源进行两轮巩固练习
解释说明	错误模式显示学生在节省计算中混淆“折扣率”和“节省金额”,建议从图示练习和结构理解入手,逐步纠正计算路径。

3 实验结果与分析

本文通过比较实验与细粒度人工评估,系统验证 CoT_MathTutor 的教学效能。实验设计聚焦以下3个方面:
①教学可控性,能否在避免答案泄露的前提下达成教学目标;
②架构优越性,模块化设计是否优于端到端 LLM 方案;
③模式差异性,实时与预载模式的性能边界。

3.1 数据集

本文采用 MultiArith、MathDial 这两个标准英语数学数据集进行评估^[19]。这两个数据集分别覆盖独立解题与教学交互两个典型场景,MultiArith 包含 180 道多步骤算术应用题,用于评估模型的分步推理与计算能力,MathDial 包含 45 组师生教学对话,用于评估交互式教学引导与反馈能力。

3.2 预处理与评价指标

本文采用“AI-AI 交互+人工标注”的综合评估框架进行实验,MathDial 数据由两位实验室团队成员独立标注,

Cohen's Kappa 为 0.78。实验评价指标包括成功率 S 、答案泄露率 T 与教学评分 TS 。其中, TS 用于综合衡量教学有效性与控制性。

$$TS = \frac{2 \times (S - T) \times S}{(S - T) + S} \quad (5)$$

此外,采用提示相关性 PR ,信息特异性 IS ,冗余提示率 RR ,错误定位精度 ELA 和有效引导占比 EGR 等指标评估不同大语言模型的提示质量。

3.3 实验设置

实验在 NVIDIA A10 GPU (24 GB 显存) 的服务器环境下进行,系统内存为 252 GB,软件环境为 Python 3.9、PyTorch 2.1.0、CUDA 11.8。本文使用的比较模型为:①GPT-4 RT 为 GPT-4 实时版端到端模型(基线);②CoT_MathTutor(GPT-4 RT)为使用 GPT-4 实时版本的 CoT_MathTutor;③CoT_MathTutor(GPT-4 PL)为使用 GPT-4 预加载版本的 CoT_MathTutor;④CoT_MathTutor(LLaMA PL)为使用 LLaMA 预加载版本(MetaMath-13B 后端)的 CoT_MathTutor。

为了降低大语言模型生成结果的随机性,对模型推理过程统一施加结构化约束:①所有解题步骤均采用固定的 StepCoT 输出格式;②涉及计算的步骤强制使用统一的 `<<expression=result>>` 表达形式,并通过解析校验确保结果一致性;③教学交互过程设置最大轮数为 60,避免无限对话;④对生成失败或格式不符合要求的情况,最多进行 3 次重试,并在两次调用之间设置固定时间间隔。

3.4 实验结果

3.4.1 性能评价

在 MultiArith、MathDial 任务中,评估 GPT-4 RT、CoT_MathTutor(GPT-4 RT)、CoT_MathTutor(GPT-4 PL)、CoT_MathTutor(LLaMA PL)模型的 S 、 T 、 TS ,以衡量其不同教学场景中的稳定性、引导效果与安全性,如表 9 所示。由此可知,CoT_MathTutor(GPT-4 RL)在两类任务中 TS 最高,保持了零答案泄露率,表明在实时推理与教学控制条件下,系统能稳定实现高质量引导。相较而言,预加载版本在 MathDial 场景中出现了明显的答案泄露现象,说明静态生成路径难以适应教学对话中的动态语境变化。端到端 GPT-4 虽具备较高解题成功率,但在教学评分上明显落后,反映出缺乏结构化流程控制对教学场景的不适配性。

Table 9 Performance of different models
表 9 不同模型性能

	MultiArith			MathDial		
	$S/\%$	T	TS	$S/\%$	T	TS
GPT-4 RL	98	0	0.98	82	0	0.82
CoT_MathTutor(GPT-4 RL)	100	0	1	100	0	1
CoT_MathTutor(GPT-4 PL)	100	1	0.99	96	11	0.90
CoT_MathTutor(LLaMA PL)	100	1	0.99	91	33	0.71

3.4.2 细粒度指标评价

对各个大语言模型生成的引导性提示进行人工标注,以评价各个语言模型的细粒度特性。同时,为了充分评估模型在复杂数学对话场景下的表现,采用 MathDial 数据集

(难度较低)进行实验,如表 10 所示。由此可知,CoT_MathTutor(GPT-4 RT)在评估维度上均优于比较模型,提示相关性与信息特异性分别达到 96.2%、92.4%,相较于 GPT-4 端到端模型提升 11.9%、13.9%;错误定位精度提升至 94.3%,冗余提示率降至 12.1%,显著优于端到端基线。在教学效果方面,CoT_MathTutor(GPT-4 RT)的有效引导占比达到 89.7%,相较于 GPT-4 提升 17.1%,表明其在严格控制答案泄露的同时,能提供更具针对性的教学引导。

总的来讲,将 StepCoT 结构化思维链与 FSM 教学控制机制引入 CoT_MathTutor 后,在提示质量与教学引导效果方面均显著优于端到端模型,证实了结构化提示与动态控制策略在复杂多步教学场景中的有效性。

Table 10 Comparison of the quality of prompts generated by large language models
表 10 大语言模型生成提示的质量比较

	$PR/\%$	$IS/\%$	$RR/\%$	$ELA/\%$	$EGR/\%$
CoT_MathTutor(GPT-4 RL)	96.2	92.4	12.1	94.3	89.7
CoT_MathTutor(GPT-4 PL)	87.8	84.5	28.6	89.7	76.5
GPT-4 RL	84.3	78.5	34.7	83.1	72.6

3.4.3 消融实验

为了评估 CoT_MathTutor 系统中各模块的有效性,逐步剔除或修改系统中的 StepCoT、三级匹配机制(Three-level Matching Mechanism, TLM)、FSM 等模块,验证各模块对系统整体性能的贡献,如表 11 所示。由此可知,在同时引入 StepCoT、三级匹配机制与 FSM 控制时,系统在成功率、答案控制与教学评分上达到最优表现;去除 FSM 后,系统缺乏阶段性约束,解题流程稳定性下降;去除三级匹配机制后,步骤级校验能力减弱,答案泄露率上升;去除 StepCoT 后,提示结构性不足,整体引导效果受限。综上,3 个模块在教学场景中具有明显的互补关系,是实现高质量教学引导的关键组成。

Table 11 Component level ablation experiment results
表 11 组件级消融实验结果

Scheme	StepCoT	TLM	FSM	$S/\%$	$T/\%$	TS
Scheme1	✓	✓		83.0	4.5	0.84
Scheme2	✓		✓	86.5	3.8	0.86
Scheme3		✓	✓	84.2	4.0	0.84
Scheme4	✓	✓	✓	100.0	0	1.00

3.5 讨论

实践发现,CoT_MathTutor 的性能提升不仅单纯来源于大语言模型的生成能力,还依赖于解题过程与教学交互的结构化约束。

首先,引入 StepCoT 可将原本隐式的推理过程拆解为目标明确、顺序清晰的多步结构,系统在步骤层面对模型输出进行约束,使生成结果与教学目标保持一致,可有效降低答案泄露发生概率。其次,系统采用三级匹配机制在步骤级别对学生作答进行判定,可提供可解释的认知状态反馈。最后,有限状态机可根据评估结果调度提示策略,

对教学节奏与引导强度进行稳定控制,避免了端到端模型中推理生成与教学策略混杂的问题,有助于维持多轮交互过程中的一致行为。

实验表明,在复杂的数学教学场景中,教学效果的提升主要依赖控制机制的引入,而非生成能力的增强。在使用相同底层语言模型的条件下,具备结构化思维链与状态控制的系统显著优于端到端方案,证明了在交互式教学任务中,合理的流程约束与策略控制对系统性能具有决定性作用。

4 结语

本文提出一种基于思维链引导的数学教学系统架构 CoT_MathTutor,从系统层面对数学问题求解与教学交互过程进行统一建模。通过结构化思维链、多路径解题建模、有限状态机控制机制,实现了对教学流程与模型推理行为的可控引导,构建了涵盖问题分析、解题推进与教学反馈的完整教学闭环。

实践表明,该系统在数学辅导场景中展现出了良好的教学引导能力与认知诊断特性,能支持多步骤问题求解过程中的路径选择、状态判断与教学策略调整,体现了引导式教学框架在大语言模型教学应用中的可行性与应用价值。然而,研究仍存在一定局限性,包括对高性能模型的依赖、多模态教学支持能力有限等。

未来,将围绕模型轻量化、多模态交互扩展、跨学科教学适配等方面展开研究,以进一步完善引导式智能教学系统的整体能力。

参考文献:

- [1] DIAB I M, FENG X H, DYU V, et al. Revolutionizing higher education: unleashing the potential of large language models for strategic transformation[J]. IEEE Access, 2024, 12:67738-67757.
- [2] NWANA H S. Intelligent tutoring systems: an overview[J]. Artificial Intelligence Review, 1990, 4:251-277.
- [3] WIKTOR S, DORODCHI M, WIKTOR N. AI can help instructors help students: an LLM-supported approach to generating customized student reflection responses [C]// 2024 IEEE Frontiers in Education Conference, 2024:1-9.
- [4] LIU X. Comparison of informatization teaching mode and traditional teaching mode [J]. Science and Technology Innovation Herald, 2012(3):161. 刘晓. 信息化教学模式与传统教学模式的比较[J]. 科技创新导报, 2012(3):161.
- [5] BLOOM B S. The 2 sigma problem: the search for methods of group instruction as effective as one-to-one tutoring[J]. Educational Researcher, 1984, 13(6), 4-16.
- [6] ANDERSON J R, CONRAD F G, CORBETT A T. Skill acquisition and the LISP tutor[J]. Cognitive Science, 1989, 13(4): 467-505.
- [7] GRAESSER A C, VANLEHN K, ROSÉ C P, et al. Intelligent tutoring systems with conversational dialogue [J]. AI Magazine, 2001, 22(4): 39-39.
- [8] ACHIAM J, ADLER S, AGARWAL S, et al. GPT-4 technical report [DB/OL]. <https://arxiv.org/abs/2303.08774>.
- [9] TOUVRON H, LAVRIL T, IZACARD G, et al. LLAMA: open and efficient foundation language models [DB/OL]. <https://arxiv.org/abs/2302.13971>.
- [10] ZENG A H, LIU X, DU Z X, et al. GLM-130b: an open bilingual pre-trained model[DB/OL]. <https://arxiv.org/abs/2210.02414>.
- [11] BI X, CHEN D L, CHEN G T, et al. Deepseek llm: scaling open-source language models with longtermism [DB/OL]. <https://arxiv.org/abs/2401.02954>.
- [12] XIAO H Y, XU J Y. Research on the construction and application of LLM-based "blended teaching design" agent [J]. Journal of Cangzhou Normal University, 2025, 41(1): 97-102. 肖洪云,徐佳钰. 基于LLM的"混合式教学设计"智能体构建与应用研究[J]. 沧州师范学院学报, 2025, 41(1):97-102.
- [13] WEI J, WANG X Z, SCHUURMANS D, et al. Chain-of-thought prompting elicits reasoning in large language models [J]. Advances in Neural Information Processing Systems, 2022, 35: 24824-24837.
- [14] KHOT T, TRIVEDI H, FINLAYSON M, et al. Decomposed prompting: a modular approach for solving complex tasks[DB/OL]. <https://arxiv.org/abs/2210.02406>.
- [15] ZHOU Y T, CHU H, ZHU F F, et al. A survey of deep learning-based personalized learning resource recommendation [J]. Computer Science, 2024, 51(10): 17-32. 周洋涛,褚华,朱非非,等. 基于深度学习的个性化学习资源推荐综述[J]. 计算机科学, 2024, 51(10):17-32.
- [16] KHALIL H, EBNER M. MOOCs completion rates and possible methods to improve retention—a literature review [C]// World Conference on Educational Multimedia, Hypermedia and Telecommunications, 2014: 1305-1313.
- [17] KIM B, CHEONG D. SimClass: simulate your class before you teach [EB/OL]. <https://www.igi-global.com/chapter/simclass-simulate-your-class-before/8521>.
- [18] XU X L, WANG L Y, ZHOU H. An implementation framework of finite state machine [J]. Journal of Engineering Design, 2003, 10(5): 251-255. 徐小良,汪乐宇,周泓. 有限状态机的一种实现框架[J]. 工程设计学报, 2003, 10(5):251-255.
- [19] MACINA J, DAHEIM N, CHOWDHURY S, et al. Mathdial: a dialogue tutoring dataset with rich pedagogical properties grounded in math reasoning problems[DB/OL]. <https://arxiv.org/abs/2305.14536>.

(责任编辑:刘嘉文)